FORMULE DE GAUSS-BONNET-CHERN EN METRIQUE DE SIGNATURE QUELCONQUE (1)

par André Avez

Le but de cet article est d'étendre aux varietés compactes munies d' une métrique de signature quelconque une formule de Gauss-Bonnet-Chern. On donne quelques applications aux varietés d'Einstein et une généralization d' un résultat de Milnor.

Theoreme 1. Soit V_{2k} une varieté compacte orientable de dimension $2k$ munie d'une métrique riemanniene $g_{\alpha\beta}$ à p carrés positifs, $2k - p$ carrés negatifs. Si η est l'élement de volume de $g_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ son tenseur de courbure, la caracteristique d'Euler-Poincaré de V_{2k} est donnée par

$$\chi(V_{2k}) = \frac{(-1)^{[p/2]}}{2^{2k}\pi^k k!} \int_{V_{2k}} \Delta \cdot \eta \tag{1}$$

ou

$$\Delta = \eta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} \eta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}} R^{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} \dots R^{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k} \beta_{2k-1} \beta_{2k}} \tag{2}$$

Preuve. On sait que si $g_{\alpha\beta}$ est elliptique

$$\chi(V_{2k}) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}\pi^k k!} \int_{V_{2k}} \Delta \cdot \eta$$

ou la $2k$ — forme duale de Δ est

$$* \Delta = \eta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} \Omega^{\alpha_1 \alpha_2} \wedge \dots \wedge \Omega^{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}$$

(1) S. S. Chern va publier un article analogue: *Pseudo-riemannian geometry and the Gauss-Bonnet Formula,* Annals of the Brazilian Academy of Sciences (March 1963). A. Avez, C. R. Academie des Sciences de Paris, t. 255, p. 2049-2051 (1962).

(par example: S. S. Chern, Annals of Mathematics, 45, 1944, p. 747-752).

Mais la forme de courbure $\Omega_{\alpha\beta}$ est donnée par

$$\Omega_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \omega^{\gamma} \wedge \omega^{\delta};$$

Il en resulte

$$\Delta = \eta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2k}}\, \eta_{\beta_1 \ldots \beta_{2k}}\, R^{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} \ldots R^{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k} \beta_{2k-1} \beta_{2k}}$$

c'est-à-dire (2). Le théoreme est donc vrai en métrique elliptique.

Suposons que V_{2k} admette une métrique riemannienne $* g_{\alpha\beta}$ à p carrés positifs. Il est aisé de voir que cette métrique peut etre obtenue de la maniere suivante: V_{2k} admet un champ differentiable de p-plans (²). Une métrique elliptique $g_{\alpha\beta}$ induit sur ces p-plans une métrique $a_{\alpha\beta}$, et sur les $(2k\text{-}p)$-plans orthogonaux une métrique $b_{\alpha\beta}$ avec $g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}$. Pour $t \in R$ considerons le tenseur

$$l_{\alpha\beta}(t) = g_{\alpha\beta} + t\, b_{\alpha\beta} \tag{3}$$

Il définit sur V_{2k} une métrique reguliere pour $t \neq -1$, elliptique si $t > -1$, à p carrés positifs si $t < -1$. On peut prendre $* g_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}\ (-2)$.

Le tenseur inverse de $l_{\alpha\beta}\ (t)$ est donné par

$$l^{\alpha\beta}(t) = g^{\alpha\beta} - \frac{t}{1+t}\, b^{\alpha\beta}. \tag{4}$$

Si $\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta}(t)$ sont les symboles de Christoffel relatifs à $l_{\alpha\beta}\ (t)$, on sait que $C_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta}\ (t) = \Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta}\ (t) - \Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta}\ (0)$ definissent un tenseur. Pour l'évaluer en $x \in V_{2k}$ choissons en ce point un systeme de coordonnées normales relatives à $g_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}\ (0)$. Comme $(\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta}(0))_x = 0$ on a:

$$C_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta}(t) = \Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta}(t) = \frac{1}{2}\, l^{\gamma\sigma}(t)\,[\partial_{\alpha} l_{\sigma\beta}(t) + \partial_{\beta} l_{\sigma\alpha}(t) - \partial_{\sigma} l_{\alpha\beta}(t)].$$

(²) N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, p. 206, Princeton University Press.

Mais si ∇_α est l'opérateur de derivation covariante dans la connexion riemannienne associée à $g_{\alpha\beta}$: $\nabla_\alpha l_{\beta\gamma}(t) = \partial_\alpha l_{\beta\gamma}(t)$, donc

(5) $$C_\alpha{}^\gamma{}_\beta = \frac{1}{2} l^{\sigma\gamma}(t)\,[\nabla_\alpha l_{\sigma\beta}(t) + \nabla_\beta l_{\alpha\sigma}(t) - \nabla_\sigma l_{\alpha\beta}(t)].$$

En utilisant le même systéme de coordonnées normales en x:

$$R_{\lambda\alpha}{}^\mu{}_\beta(0) = \partial_\lambda \Gamma_\alpha{}^\mu{}_\beta(0) - \partial_\alpha \Gamma_\lambda{}^\mu{}_\beta(0).$$

Mais $\Gamma_\alpha{}^\mu{}_\beta(0) = \Gamma_\alpha{}^\mu{}_\beta(t) - C_\alpha{}^\mu{}_\beta(t)$, donc

$$R_{\lambda\alpha}{}^\mu{}_\beta(0) = \partial_\lambda \Gamma_\alpha{}^\mu{}_\beta(t) - \partial_\alpha \Gamma_\lambda{}^\mu{}_\beta(t) - \partial_\lambda C_\alpha{}^\mu{}_\beta(t) + \partial_\alpha C_\lambda{}^\mu{}_\beta(t)$$

Or, en x:

$$\partial_\lambda C_\alpha{}^\mu{}_\beta(t) = \nabla_\lambda C_\alpha{}^\mu{}_\beta(t), \Gamma_\alpha{}^\mu{}_\beta(t) = C_\alpha{}^\mu{}_\beta(t), R_{\lambda\alpha}{}^\mu{}_\beta(t) =$$

$$= \partial_\lambda \Gamma_\alpha{}^\mu{}_\beta(t) - \partial_\alpha \Gamma_\lambda{}^\mu{}_\beta(t) + \Gamma_\lambda{}^\mu{}_\rho(t)\, \Gamma_\alpha{}^\rho{}_\beta(t) - \Gamma_\alpha{}^\mu{}_\rho(t)\, \Gamma_\lambda{}^\rho{}_\beta(t).$$

Par suite

(6) $$\begin{aligned} R_{\lambda\alpha}{}^\mu{}_\beta(t) = + R_{\lambda\alpha}{}^\mu{}_\beta(0) \nabla_\alpha C_\lambda{}^\mu{}_\beta(t) - \nabla_\lambda C_\alpha{}^\mu{}_\beta(t) \\ + C_\lambda{}^\mu{}_\rho(t)\, C_\alpha{}^\rho{}_\beta(t) - C_\alpha{}^\mu{}_\rho(t)\, C_\lambda{}^\rho{}_\beta(t). \end{aligned}$$

Enfin, l'élément de volume de $l_{\alpha\beta}(t)$ est donné par

(7) $$\eta(t) = |\,1 + t\,|^{k-p/2}\, \eta(0)$$

Si $\triangle(t)$ est l'expression (2) associée a $l_{\alpha\beta}(t)$ il resulte de (3), ..., (7), qu au point x de V_{2k}

$$\triangle(t) = |\,1 + t\,|^{-p} \frac{P(t)}{(1+t)^{5k}}$$

où $P(t)$ est un polynôme. Il en resulte que

(8) $$f(t) \equiv \frac{(-1)^k}{2^{2k}\pi^k k!} \int_{V_{2k}} \triangle(t)\, \eta(t) = |\,1 + t|^{k-3p/2} \frac{Q(t)}{(1+t)^{5k}}$$

où $Q(t)$ est un polynôme.

Supposons p pair $(p = 2p')$:

Pour $t > -1$ (métrique elliptique), $f(t) = \chi(V_{2k})$. Donc $Q(t) > \chi(V_{2k})\ (1+t)^{4k+3p'}$ et pour tout $t \neq -1$:

$$f(t) = \chi(V_{2k})\ \frac{|1+t|^{k-3p'}}{(1+t)^{k-3p'}}$$

Ainsi, pour $t < -1$, et en particulier $t = -2$, $f(t) = (-1)^{k+p}\ \chi(V_{2k})$, ce qui démontre la formule (1).

Supposons p impair $(p = 2p' + 1)$. Pour $t > -1$ on doit avoir

$$\frac{Q(t)}{(1+t)^{4k+3p'+1}} \frac{1}{\sqrt{1+t}} = \chi(V_{2k})$$

Comme $\chi(V_{2k})$ est un entier, cela exige $\chi(V_{2k}) = 0$ et $Q(t) = 0$, donc $f(t) = 0$ et (1) est encore valable.

Chemin faisant on a démontré le

Corollaire. Si une varieté compacte orientable admet un champ differentiable de $(2p' + 1)$ - plans, sa caracteristique d'Euler-Poincaré est nulle.

Applications aux varietés a quatre dimensions

Rappelons une formule due a Lanczos [3]:

Soit V_4 une varieté a quatre dimensions munie d'une métrique a p carrés positifs $g_{\alpha\beta}$. Soient $R_{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci de $g_{\alpha\beta}$, R son scalaire de courbure; si on pose $B_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} R\, g_{\alpha\beta}$, on a

$$(9) \quad \frac{1}{4}\ \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\ \eta_{\lambda\mu\rho\sigma}\ R^{\gamma\delta\rho\sigma} = (-1)^p [R_{\alpha\beta\lambda\mu} - B_{\alpha\lambda}\, g_{\beta\mu} - B_{\beta\mu}\, g_{\alpha\lambda} + B_{\alpha\mu}\, g_{\beta\lambda} + B_{\beta\lambda}\, g_{\alpha\mu}]$$

Il en résulte que (2) prend la forme

$$\Delta = 4(-1)^p [R_{\alpha\beta\lambda\mu} R^{\alpha\beta\lambda\mu} - 4 R^{\alpha\lambda} R_{\alpha\lambda} + R]^2$$

et d'aprés le théoreme 1:

$$(10) \quad \int_{V_4} R_{\alpha\beta\lambda\mu} R^{\alpha\beta\lambda\mu}\, \eta = \int_{V_4} (4 R^{\alpha\lambda} R_{\alpha\lambda} - R^2)\, \eta + (-1)^{3p/2}\, 8\pi^2 \chi(V_4).$$

(3) *A remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor ir four dimensions,* Ann. of Math. 39. 1938.

THEOREME 2. Soit V_4 une varieté compacte orientable munie d'une métrique elliptique. On a

$$I \equiv \int_{V_4} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \eta \geqq 8 \pi^2 \chi (V_4)$$

l'égalité, cést-à-dire le minimum de I, est obtenue si et seulement si la métrique est d'Einstein. Si la métrique est d'Einstein, $\chi (V_4) \geqslant 0$, l'égalité n'etant obtenue que si V_4 est localement euclidienne.

Preuve. Dans ce cas, $p = 4$ et $4 R^{\alpha\lambda} R_{\alpha\lambda} - R^2 \geqq 0$, l'égalité n'etant obtenue que si $R_{\alpha\lambda} = k\, g_{\alpha\lambda}$. Le théoreme résulte alors de la formule (10).

Le derniere partie de ce theoreme est dûe a M. Berger qui me l'a communiquee oralement (4).

THEOREME 3. Soit V_4 une varieté compacte orientable munie d'une métrique hyperbolique normale:

a) Si V_4 est d'Einstein et statique orthogonale, elle est localement euclidienne;

b) Si V_4 est d'Einstein et correspond à un cas III de Petrov, son tenseur de Ricci est nul;

c) V_4 ne peut etre simultanément statique orthogonale et schématiser un champ électromagnetique pur singulier.

Preuve. Dans ce as $p = 1$ et $\chi (V_4) = 0$, (10) se reduit à

$$\int_{V_4} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \eta = \int_{V_4} (4 R^{\alpha\lambda} R_{\alpha\lambda} - R^2)\, \eta. \tag{11}$$

Si de plus la métrique est d'Einstein $4 R^{\alpha\lambda} R_{\alpha\lambda} - R^2 = 0$ et il reste

$$\int_{V_4} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \eta = 0. \tag{12}$$

(4) Voir aussi, A. Lichnerowicz, Proc. of the Int. Congress Math. Harvard, 2, 1950, p. 219.

Si V_4 est statique orthogonale, prenons un repere (e_α) orthonorme avec e_4 colineaire au vector de Killing. On sait que

$R_{ijk4} = 0$ pour $i, j, k = 1, 2, 3$ ([5]). Par suite

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{i,j,k,l} (R_{ijkl})^2 + 4 \sum_{i,j} (R_{i4j4})^2$$

pour $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Donc $R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \geqq 0$, l'égalité n'étant obtenue que si $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Le théorème résulte alors de la formule (12).

b) Dans un cas III de Petrov ([6]) il existe un repère orthonormé où les $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sont tous nuls sauf

$$R_{2313} = R_{1313} = R_{1212} = \frac{\lambda}{3}$$

$$R_{1414} = R_{2434} = R_{3434} = -\frac{\lambda}{3}$$

$$R_{2313} = R_{2334} = R_{1214} = R_{1424} = \sigma$$

et ceux qui s'en déduisent par d'évidentes permutations. Par suite $R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = (8/3)\lambda^2$ et de (12) on tire $\lambda = 0$, soit $R_{\alpha\beta} = 0$.

c) Les équations d'Einstein s'écrivent $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(R + k) g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$, où χ est une constante, k la constante cosmologique $T_{\alpha\beta}$ le tenseur impulsion-énergie. On en deduit

$$4 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R^2 = \chi^2 [4 T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - (T_\alpha{}^\alpha)^2].$$

Mais en schéma electromagnétique pur $T_\alpha{}^\alpha = 0$ et si ce champ est singulier $T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0$. Donc $4 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R^2 = 0$.

La relation (11) se réduit donc a la relation (12). Puisque l'espace-temps est statique orthogonal on peut appliquer le raisonnement du a). On en déduit $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, ce qui contredit la presence effective de champ électromagnetique. On obtient ainsi un theoreme du type Aufenkamp ([7]) mais sans hypothèse sur le signe de la constante cosmologique.

([5]) A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétsime*, p. 119, Masson, Paris, 1955.

([6]) L. Bel, C. R. Acad. Sc. Paris, Mai 1959, t. 248.

([7]) D. Aufenkamp, C. R. Acad. Sc. t. 232, 1951, p. 213-214.

Applications aux varietés à courbure de signe constante

On va géneraliser un résultat du a Milnor en signature elliptique et en dimension quatre ([8]).

THEOREME 4. Soit V_n une varieté compacte orientable munie d'une métrique riemannienne a p carrés positifs et de dimension n.

Si $n = 0$ (mód. 4) et si en chaque point l'opérateur de courbure est de signe constant, $\chi(V_{2k})(-1)^{n/2} \geqslant 0$.

Si $n = 2$ (mod. 4) et si en chaque point l'opérateur de courbure est positif (resp. négatif) alors $\chi(V_{2k})(-1)^{n/2} \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$).

Dans les cas ci-dessus, si $\chi(V_{2k}) = 0$, le rang de la matrice $R^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ est inférieur a $k = n/2$.

Preuve. Par suite de $R^{\alpha\beta\gamma\delta} = R^{\gamma\delta\alpha\beta}$, on peut identifier le tenseur de courbure a un tenseur symétrique R^{AB} sur l'espace des bivecteurs en $x \in V_{2k}$. Puisque $\eta_{\ldots\alpha\beta\ldots} = -\eta_{\ldots\beta\alpha\ldots}$, les tenseur élement de volume s'identifie a un tenseur symétrique d'ordre k sur l'espace des bivecteurs en x: soit $\eta_{A_1 \ldots A_k}$. Avec ces notations (2) écrit $\Delta = \eta_{A_1\ldots A_k}\eta_{B_1\ldots B_k} R^{A_1B_1}\ldots R^{A_kB_k}$.

Interpretons R^{AB} comme une metrique éventuellement dégénerée: $\triangle$ n'est autre que la norme de $\eta_{A_1\ldots A_k}$ dans cette métrique.

Supponsons qu'en chaque point $x \in V_{2k}$, $R^{AB}\,\phi_A\,\phi_B \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) pour tout bivecteur ϕ_A. Il en resulte $\triangle \geqslant 0$ (resp. $(-1)^k \triangle \geqslant 0$). La premiere partie du theoreme résulte alors de la formule (1).

Si de plus $\chi(V_{2k}) = 0$, alors $\triangle = 0$. Comme R^{AB} est symétrique, il admet une décomposition

$$R^{AB} = \pm \sum_{\alpha} \phi^A(\alpha)\,\phi^B(\alpha)$$

ou les ϕ sont bivecteurs. Par suite

$$\Delta = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} [\eta_{A_1\ldots A_k}\,\varphi^{A_1}(\alpha_1)\ldots\varphi^{A_k}(\alpha_k)]^2.$$

Si rang $R^{AB} \geqslant k$, l'un au moins des crochets renferme des $\phi^A(\alpha)$ linéairement distincts, et par suite ne s'annule pas. Cela est contraire a l'hypothèse, donc rang $R^{AB} < k$.

([8]) Cité par S. S. Chern dans Abh. Sem. Hamburg, 1956, p. 33.